No. Date 08/05/19

ΦΥΛΛΑΔΙΟ 6

Άσκηση 1

$$A=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Θ. Euler: α) $A^{-1}=A^t$

β) $\det A=1$

Α ορθογ. διότι οι γραμμές του αποτελούν ορθοκανονική βάση

$$\det\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-1\cdot\det\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=-1\cdot(-1\cdot1-0)=-1(-1)=1.$$

Ο Α έχει ιδιοτιμή το 1. Να βρω ιδιοδιάνυσμα.

$$\begin{pmatrix}-1&1&0\\1&-1&0\\0&0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-x+y=0\\x-y=0\\-2z=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=y\\z=0\end{cases}$$

$$(x,x,0)=x(1,1,0)\to\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2},0\right)$$

Επεκτείνω σε ορθοκανονική βάση.

$$\begin{pmatrix}1/\sqrt2\\1/\sqrt3\\0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}-1/\sqrt2\\1/\sqrt3\\0\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}1/\sqrt2&-1/\sqrt2&0\\1/\sqrt2&1/\sqrt2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\det P=\det\begin{pmatrix}1/\sqrt2&-1/\sqrt2&0\\1/\sqrt2&1/\sqrt2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}1/\sqrt2&-1/\sqrt2\\1/\sqrt2&1/\sqrt2\end{pmatrix}=1>0$$

Ο ζητούμενος πίνακας είναι ο:

$$P^tAP=\begin{pmatrix}1/\sqrt2&1/\sqrt2&0\\-1/\sqrt2&1/\sqrt2&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/\sqrt2&-1/\sqrt2&0\\1/\sqrt2&1/\sqrt2&0\\0&0&1\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$$

Ο ζητούμενος άξονας δίνεται από το ιδιοδιάνυσμα $(1,1,0)$. Δηλ. είναι η ευθεία $t(1,1,0)$. Το ζητούμενο επίπεδο είναι $\perp$ σ' αυτόν τον άξονα & η ζητούμενη γωνία ϕ δίνεται από

$$\begin{pmatrix}\cos\phi&-\sin\phi\\\sin\phi&\cos\phi\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}\Rightarrow\phi=\pi$$

No. Date

Άσκηση 2

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ πραγματικός συμμετρικός $\Rightarrow$ διαγωνοποιείται

$$\chi_A(\lambda) = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ \lambda-1 & -1 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)\left[(2-\lambda)(1-\lambda)-2\right] =$$

$$= (1-\lambda)(2+\lambda^2-3\lambda-2) = \lambda(1-\lambda)(\lambda-3)$$

Άρα $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$

- $V(0)$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x-y=0 \\ x=y=z \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V(0) = \langle (1,1,1) \rangle = \langle (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \rangle$

- $V(1)$: $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x=0 \\ -x-z=0 \\ -x=z \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V(1) = \langle (1,0,-1) \rangle = \langle (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) \rangle$

- $V(3)$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -2x-y=0 \Rightarrow y=-2x \\ x=z \end{array} \right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow V(3) = \langle (x,-2x,x) \rangle = \langle (1,-2,1) \rangle = \langle (1/\sqrt{6}, -2/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}) \rangle$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad A = P\Lambda P^t \text{ με } \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 3 \end{pmatrix}$$

Άσκηση 3: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ $\quad f(x,y,z)=(ax-y+z,\ -x+by-z,\ x-y+2z)$

Ο f έχει ιδιοτιμή το 1 με πολλαπλότητα 2

$$A=\begin{pmatrix} a & -1 & 1\\ -1 & b & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix} \qquad A=A^t \Rightarrow A \text{ διαγωνοποιείται}$$

α' τρόπος: $\chi_A(\lambda)=(1-\lambda)^2\underbrace{(\kappa-\lambda)}_{\text{πρωτοβάθμιο}}$

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix} a-\lambda & -1 & 1\\ -1 & b-\lambda & -1\\ 1 & -1 & 2-\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix} a-\lambda & -1\\ -1 & b-\lambda\\ 1 & -1\end{matrix} =$$

$=(a-\lambda)(b-\lambda)(2-\lambda)+1+1-(b-\lambda)-(a-\lambda)-(2-\lambda)=$

$=(ab-\lambda a-\lambda b+\lambda^2)(2-\lambda)+\cancel{2}-b+\lambda-a+\lambda-\cancel{2}+\lambda=$

$=2ab-2\lambda a-2\lambda b+2\lambda^2-\lambda ab+\lambda^2 a+\lambda^2 b-\lambda^3-b-a+3\lambda=$

$=-\lambda^3+\lambda^2(a+b+2)+\lambda(3-2a-2b-ab)+(2ab-b-a)$

$\lambda=1\Rightarrow -1+\cancel{a}+\cancel{b}+2+3-2a-2b-ab+2ab-\cancel{b}-\cancel{a}=0\Rightarrow$

$\Rightarrow 4-2a-2b+ab=0\Rightarrow 2(2-a)-b(2-a)=0\Rightarrow$

$\Rightarrow(2-a)(2-b)=0\Rightarrow a=2$ $\boxed{\text{κ}}$ $b=2$ (επειδή: έχει
ιδιοτιμή το 1 με πολλαπλότητα 2. Γιατί δεν αρκεί
$a=2$ ή $b=2$. Αυτό θα ήταν αρκετό αν είχε πολλ/τητα 1)

Άρα ο ζητούμενος πίνακας είναι ο:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{pmatrix}$$

β' τρόπος: $\lambda=1$ με πολλ/τητα 2 κ A διαγωνοποιείται $\Rightarrow \dim V(1)=2$

$$\begin{pmatrix} a-1 & -1 & 1\\ -1 & b-1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Βρες τα a,b ώστε ο ιδιοχώρος αυτός να έχει 2 τουλάχιστον γραμμ. ανεξ. ιδιοδιανύσματα

• $V(1)$: $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left\{\begin{matrix} x-y+z=0\\ y=x+z\end{matrix}\right\}\Rightarrow$

No. Date

$\Rightarrow V(1) = \langle (1,1,0), (0,1,1) \rangle = \langle (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \rangle$

- $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\langle (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) \rangle}{1} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) =$

$= \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) = \left(\frac{-1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$V(1) = \langle \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \rangle = \langle \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \rangle$

$$\det\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ 1-\lambda & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 0 & 1-\lambda & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)^2 \det\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$= (1-\lambda)^2 (4-\lambda)$ άρα $\lambda_3 = 4$.

- $V(4)$: $\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - y + z = 0 \\ -x - 2y - z = 0 \Rightarrow z = x + 2y \\ x - y - 2z = 0 \end{cases}$

$V(4) = \langle (1,-1,1) \rangle = \langle (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \rangle$

$B^m = A = P \Lambda P^t$

$$P = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{με} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & 4 \end{pmatrix}$$

$\forall m \geq 1$ έχω ότι: $B = P \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ 0 & & \sqrt[m]{4} \end{pmatrix} P^t$

No. Date

Άσκηση 4

$$A=\begin{pmatrix}0 & i & 0\\ -i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}$$

$$\chi_A(\lambda)=\det\begin{pmatrix}-\lambda & i & 0\\ -i & -\lambda & -i\\ 0 & i & -\lambda\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}-\lambda & 0 & \lambda\\ -i & -\lambda & -i\\ 0 & i & -\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=\lambda\cdot\det\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ -i & -\lambda & -i\\ 0 & i & -\lambda\end{pmatrix}=\lambda\cdot\det\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ -2i & -\lambda & -i\\ -\lambda & i & \lambda\end{pmatrix}=$$

$$=\lambda\det\begin{pmatrix}-2i & -\lambda\\ -\lambda & i\end{pmatrix}=\lambda(-2i^2-\lambda^2)=\lambda(\lambda^2-2)$$

$\lambda_1=0$, $\lambda_2=\sqrt{2}$, $\lambda_3=-\sqrt{2}$ $\Rightarrow$ A διαγωνοποιείται

$$\underset{\text{συζυγής}}{\bar{A}}=\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & i\\ 0 & -i & 0\end{pmatrix} \quad \text{κ}' \quad \bar{A}^t=\begin{pmatrix}0 & i & 0\\ -i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}=A$$

Άσκηση 6

$$A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ a & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{pmatrix}>0$$

$$A>0 \overset{\text{ορ.}}{\Longleftrightarrow} \boxed{\langle \underset{\substack{\uparrow\\ \text{στήλη}}}{(Au)^t}, u^t\rangle > 0 \quad \forall u\neq \bar{0}}$$

$A>0 \Leftrightarrow \lambda_i>0$, δλδ $1>0$ $\begin{pmatrix}1 & a\\ a & 1\end{pmatrix}>0$ κ' $\det A>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$

$$-\frac{1}{\sqrt{2}}<a<\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Άσκηση 5

Με τον ορισμό η λύση.

Τετραγωνικές Μορφές

$Q: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$Q(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n) A (x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ με

A πραγματικός συμμετρικός πίνακας

$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j$ (1)

$A = P \Lambda P^t$ με P ορθογώνιος κ' Λ διαγώνιος με τις ιδιοτιμές του A. Ο P δημιουργείται από τα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα του A. Ο P λοιπόν είναι πίνακας μετάβασης από την κανονική στη νέα βάση

$$Q(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_n) A (x_1, \dots, x_n)^t =$$
$$= (x_1, \dots, x_n) P \Lambda P^t (x_1, \dots, x_n)^t =$$
$$= ((x_1, \dots, x_n) P) \Lambda ((x_1, \dots, x_n) P)^t$$

Αν ονομάσω $(x_1', \dots, x_n') = (x_1, \dots, x_n) P$ τότε η τετραγωνική ως μορφή μετασχηματίζεται σε $V = v_1 x_1' + v_2 x_2' + \dots v_n x_n'$ προς τη νέα βάση

$$Q(x_1', \dots, x_n') = (x_1', \dots, x_n') \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} (x_1', \dots, x_n')^t =$$

$$= \lambda_1 (x_1')^2 + \dots + \lambda_n (x_n')^2 \quad (2)$$

Συγκρίνω (1) κ' (2).

Η (2) καλείται κανονική μορφή της τετραγωνικής μορφής Q

$\lambda_1 \geq Q(u) \geq \lambda_n$ για $\|u\| = 1$ κ' $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$

Πχ: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ κ' η τετραγωνική μορφή

$Q(x, y, z) = x^2 - z^2 - 4xy + 4yz$. Να βρεθεί η κανονική μορφή

Διαγωνοποιώ τον A: $\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$

- $-\lambda(\lambda^2 - 1) - 4(1-\lambda) + 4(1+\lambda) = -4 + 4\lambda + 4 + 4\lambda = 8\lambda$
- $\lambda(\lambda^2 + 1 + 8) = -\lambda(\lambda - 3)(\lambda + 3)$

$\lambda_1 = 3 \quad \lambda_2 = 0 \quad \lambda_3 = -3$

Η κανονική μορφή θα είναι:

$Q(x',y',z') = 3(x')^2 + 0(y')^2 - 3(z')^2$

$(x',y',z') = (x,y,z)P$

→ $V(3)$: $\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $x = -y = -2z$, $y = 2z$

$V(3) = \langle(-2,2,1)\rangle = \langle\left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)\rangle$

→ $V(0) = \ker A$: $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \dots$

$V(0) = \langle(2,1,2)\rangle = \langle\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)\rangle$

→ $V(-3)$: $\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $y = 2x$, $z = -y = -2x$

$V(-3) = \langle(1,2,-2)\rangle = \langle\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}\right)\rangle$

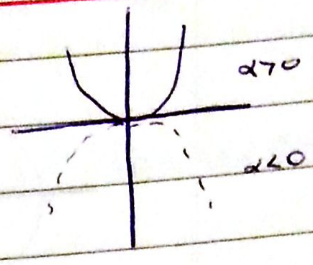
$P = \begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

$(x',y',z') = (x,y,z)\cdot P \Rightarrow$

$\Rightarrow (x',y',z') = (x,y,z)\begin{pmatrix} -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 2/3 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

Τετραγωνικές μορφές κ' καμπύλες β' βαθμού

Γνωστές δευτεροβάθμιες καμπύλες στο επίπεδο:

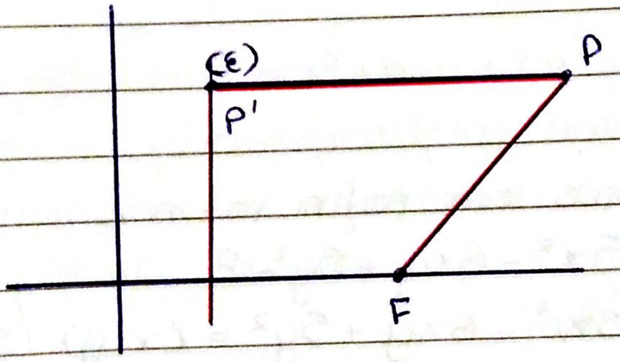


α) Παραβολή $y=\alpha x^2$

β) Υπερβολή $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$

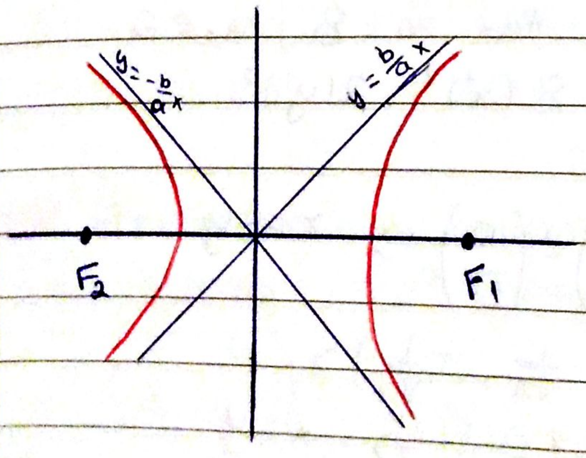
γ) Έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

α) <u>Παραβολή</u> είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου τα οποία έχουν ίση απόσταση από δεδομένο σημείο F κ' δεδομένη ευθεία (ε)



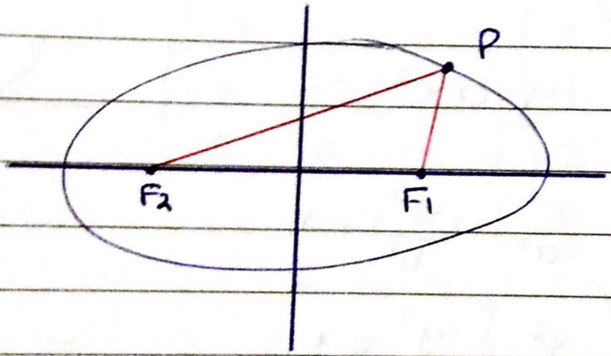
$PP' = PF$

β) <u>Υπερβολή</u> είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων η απόλυτη τιμή της διαφοράς των αποστάσεων από 2 σταθερά σημεία F_1 κ' F_2 είναι σταθερή.



$|F_1P - F_2P| = c$: σταθερό

γ) Έλλειψη είναι το σύνολο των σημείων του επιπέδου των οποίων το άθροισμα των αποστάσεων από 2 σταθερά σημεία F_1 & F_2 είναι σταθερό



$PF_1 + PF_2 = c$: σταθερό

→ Ένα σημείο $P(x,y)$ βρίσκεται πάνω σε μια δευτεροβάθμια καμπύλη όταν ικανοποιεί μια εξίσωση μορφής:

$$\boxed{ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey = f} \qquad a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$$